sin・cos なんて見たくない

tan なんてもっと見たくない

さて今回は sin や cos、いわゆる三角比・三角関数をテーマに解説していきたいと思います。

三角比は僕にとって本当に苦手で怖い存在でした。
どのくらい苦手かというと問題文に sin や cos が含まれているのを見た瞬間に、解くのをあきらめるくらい苦手でした。

「あーこの問題、sin が入ってるから無理。やめた、やめた」

こんな状態だったので sin を使った三角形の面積公式や cos の入ったベクトルの内積などもすべてあきらめてしまっていました。

sin や cos がわからないと高校数学のほとんどの分野を捨ててしまうことになってしまいます。そうなれば、自分ひとりでなんとかするのはとても難しいです。

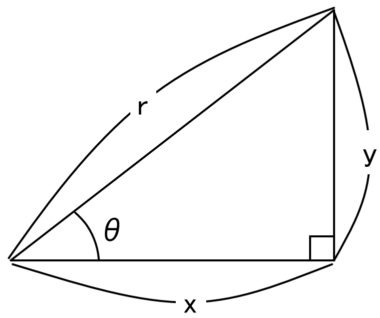
このレポートでは三角比の定義から三角関数の定義まで一気に解説します。
三角比と三角関数を別々に解説している参考書がほとんどなので、このような解説はあまりないかも知れません。

僕もなるべくわかりやすく解説をしていきますが、今回の内容は簡単なものではないです。
まったくの０の状態から三角関数まで学習するわけですから、最後までついてこれないかもしれません。

わからない部分は自分で調べるなり、参考書を読むなりして補足するようにしてください。
もちろん質問してくれても OK ですよ。

<u>三角比の定義</u>

さてまずは定義からいってみましょう。
下のような直角三角形がよく教科書や参考書に載ってますよね。
(この文字の置き方を見た時点で「そういうことね」と気付いたら、もうすでに十分に理解できている証拠だと思いますよ。)

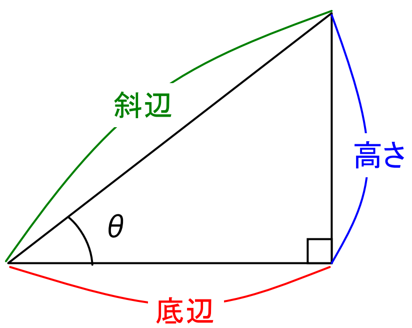


$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

読み方ですが sin は**「サイン」**、cos は**「コサイン」**、tan は**「タンジェント」**と読みます。
僕は友達に sin を思いっきり「シン」といってしまったことがあります…

とりあえず、文字がたくさん出てきているのでわかりやすい言葉に置き換えてみましょう。

★三角比の定義(置き換えた版)



$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} \\ \cos\theta = \dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} \\ \tan\theta = \dfrac{\text{高さ}}{\text{底辺}} \end{cases}$$

文字を消したので、だいぶ見やすくなりましたね。

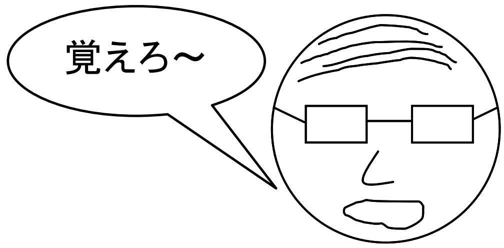
なにかわからないものが出てきたとき、自分で理解できるものに置き換えて考えるという習慣は数学に限らず、とても役に立ちます。

・文字を日本語に置き換える
・日本語を文字に置き換える
・マークシートの試験では、答えを文字で置き換える
などなど
相手の土俵で勝負をしないで、自分の土俵に引っ張ってきて勝負するという考えは大切です。
自分がわかりやすい形でしっかりと覚えておきましょう。

sin30°=1/2？

ほとんどの場合定義の説明が終わると、こんな表が出てきて「覚えろ〜」とか言われますね。

	0°	30°	45°	60°	90°
sin					
cos					
tan					

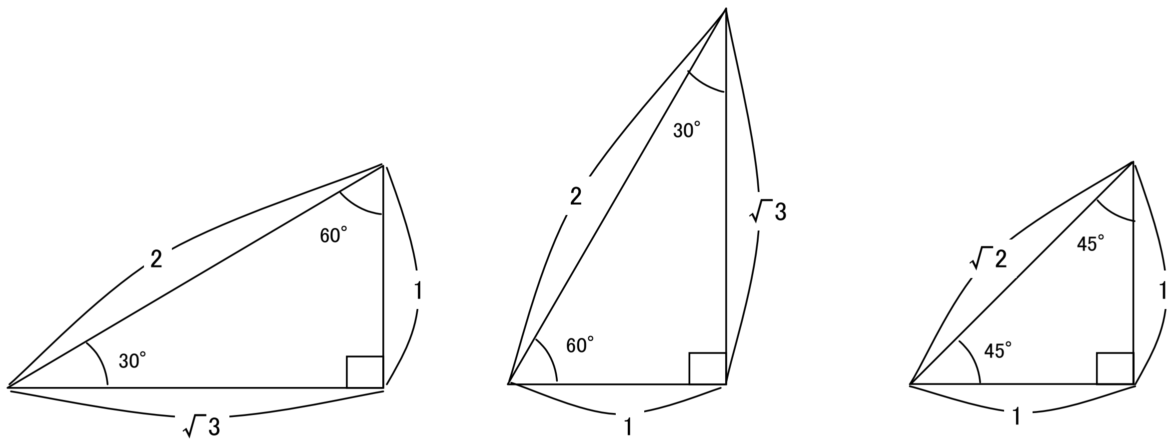


あなたが暗記が得意なら、サッと覚えてしまっていいと思います。
ただ、**なぜこの表のような結果になるのか**はきちんと理解しておく必要があります。

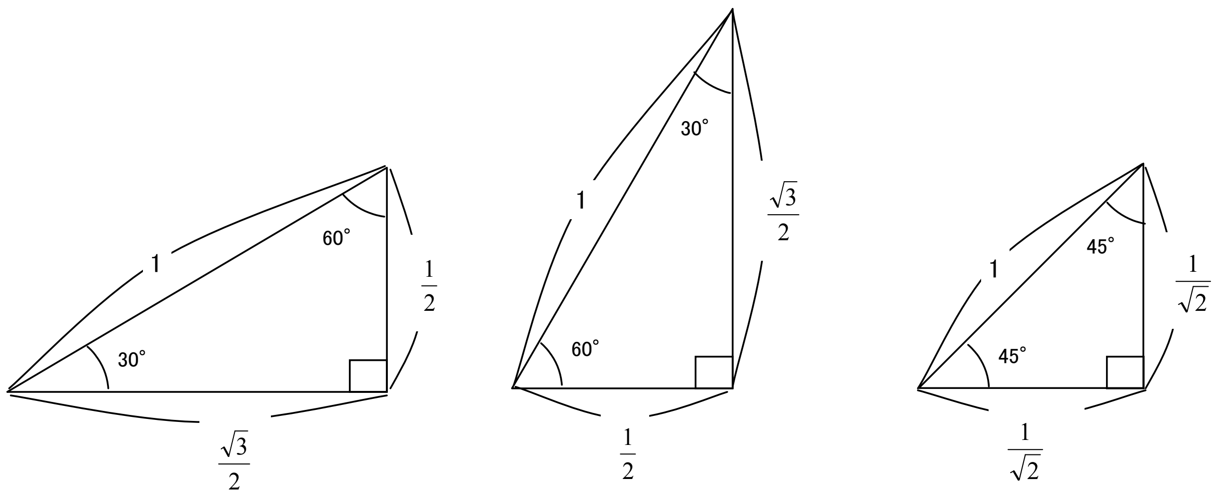
偉そうなことを書きましたが学生の頃はもちろん僕も、三角比のテストのときはこの表を直前に暗記、~~もしくは机に書いてました。~~
そしてテストが始まった瞬間に、問題用紙に書き出してそれを見ながら問題を解いてました。

しかしそんなのは所詮付け焼刃な訳で、学年が上がり三角関数なんかがでてくる頃にはすっかり忘れてしまっています。sin ってなんだっけ？みたいな

なので、そんな表よりも下の三角形を覚えておきましょう。
中学校のときから出てきている三角形たちです。メルマガ創刊号でも紹介した三角定規の形ですね。(ちなみに持ってない場合は、すぐに買ってくださいね。)

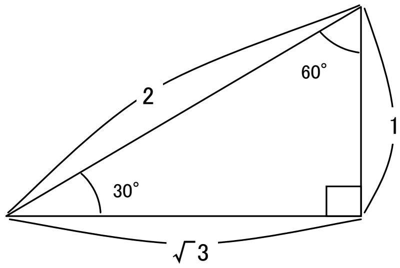


出題者はこれらの三角形をいろんな形に加工して問題文に埋め込みます。
なので**図形問題の大半にはこれらの三角形が潜んでます。**
長さや向きが変わってもすぐにわかるようにしておいてくださいね。
下の三角形は斜辺の長さを１にしたものです。



この三角形がきちんと理解できて、定義を覚えていればもうさっきの表はいらないはずです。

例題：sin30°，cos30°，tan30° を求めよ。
→30° を見た瞬間、下の三角形が頭に浮かべばOKです。
　浮かんだ図を紙に描いて計算してみましょう。

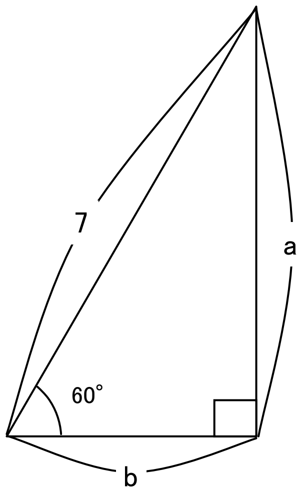


$$\sin 30° = \frac{高さ}{斜辺} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{底辺}{斜辺} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{底辺}{斜辺} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

[宿題]次の問題に答えよ。
(１)sin45°，cos45°，tan45° を求めよ。
(２)sin60°，cos60°，tan60° を求めよ。
(３)sin(90° －θ)をcosを使って表せ。
(４)a、bの値を求めよ。



[解答]　(１)(２)(３)略　(４)a=$\frac{7\sqrt{3}}{2}$　b=$\frac{7}{2}$

<u>三角比→三角関数</u>

続いて三角関数の解説に入ります。
ここで必ず持っていなければならないイメージがあります。
それは…
・sin は「y」
・cos は「x」
・tan は「傾き」

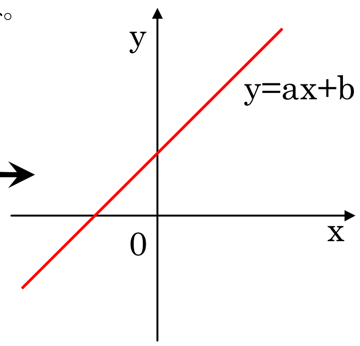
抽象的に聞こえますが大切なイメージであり本質です。

「あれ？さっきの三角比の定義と違う？」と感じるかもしれませんが、そのまま読み進めてください。

読み終わる頃には、三角比の話とつながるはずです。

<u>tan の本当の姿</u>

突然ですが、あなたは一次関数を知ってますか？
そう、あの直線です。<u>こんなかんじのヤツ</u>ですね。



こんなことを書くと・・・

「バカにするなよ、そのくらい知ってるよ。中学校の範囲だろ」
と思うかもしれませんが念のため復習をしておきます。

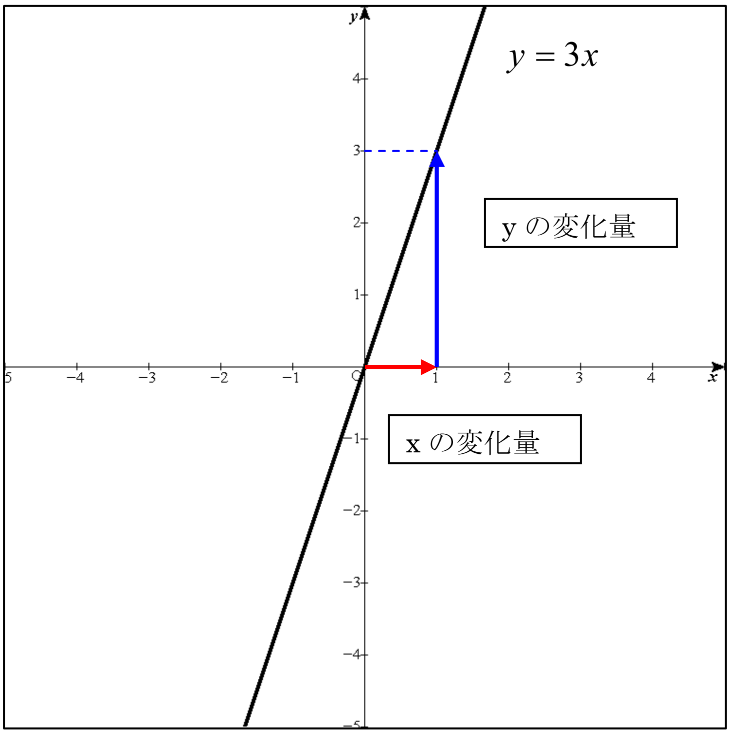
★一次関数のグラフ

一般式は $y = ax + b$ の形で表すことができます。
ちなみに a は傾きで b は切片といいましたね。

$$y = ax + b$$

例としてグラフを描いてみましょうか。

例： $y = 3x$



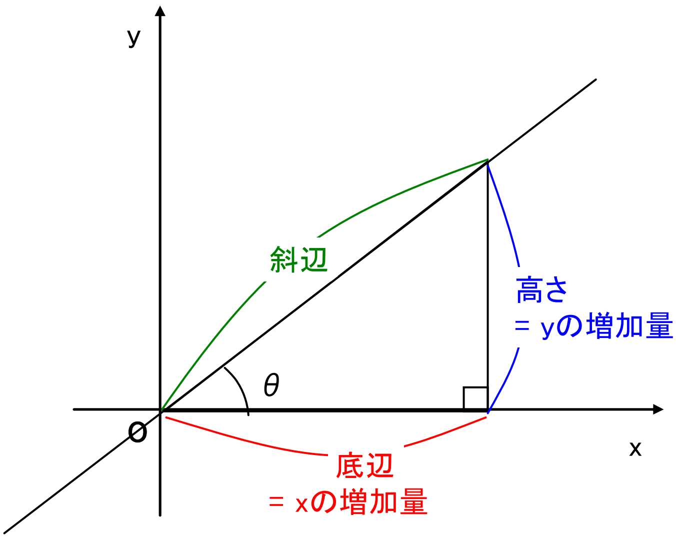
傾き＝$\dfrac{\text{yの変化量}}{\text{xの変化量}}$ なので x が１増えると y が３増えているので $\dfrac{\text{yの変化量}}{\text{xの変化量}} = \dfrac{3}{1}$ で３です。

一次関数も奥が深いのでもっと紹介したいのですが、とりあえず解説に戻ります。

先ほどの三角形に補助線を引いて座標の上に載せてみましょう。

さらに、ここで底辺を「x の増加量」、高さを「y の増加量」とみると

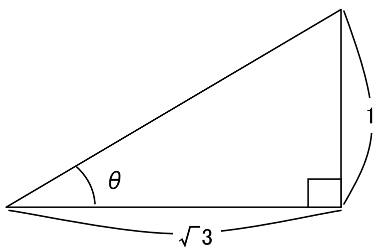
$\tan\theta = \dfrac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \text{傾き}$　よって $\tan\theta = \text{傾き}$ という関係が成り立ちます。

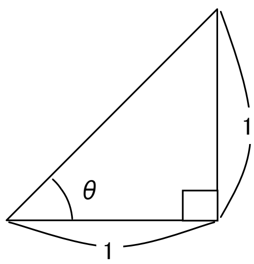


つまり $\tan\theta$ というのは**ただ単に中学校で習った「傾き」**だったわけです。

いかにも難しく「タンジェントは…」なんて言ってますが、**ただの傾き**です。
これからは tan がでてきても、**「あっ、傾きのことか」**と思ってくださいね。
言葉の難しさに惑わされずに、こういう見方ができてくると次のような問題は見ただけで分かってしまうと思います。

例題： $\tan\theta$ を求めよ。



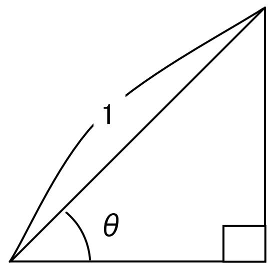


頭の中にすっと座標軸が見えてくれば合格です。

ここまでで tan のイメージはつかめてもらえたと思います。
続いて sin と cos にいきます。

sin は「y」cos は「x」

まずは下のような三角形を考えて見ましょう。
斜辺の長さが１の直角三角形です。

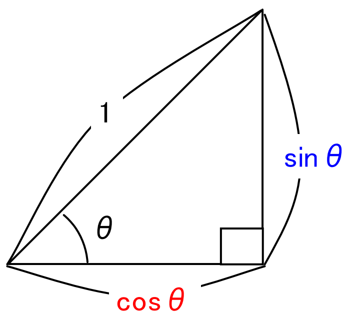


このとき、三角比の定義を使って sin と cos を求めて見ましょう。
斜辺の値１を代入してみると…

$$\sin\theta = \frac{高さ}{斜辺} = \frac{高さ}{1} = 高さ \quad よって \sin\theta = 高さ$$

$$\cos\theta = \frac{底辺}{斜辺} = \frac{底辺}{1} = 底辺 \quad よって \cos\theta = 底辺$$

高さの長さが sin θ になり底辺の長さが cos θ になっています。
つまり、下のようになります。



ちなみに、このときの tan θ はいくつになるかわかりますか？
・・・・・
・・・・
・・・
・・
・

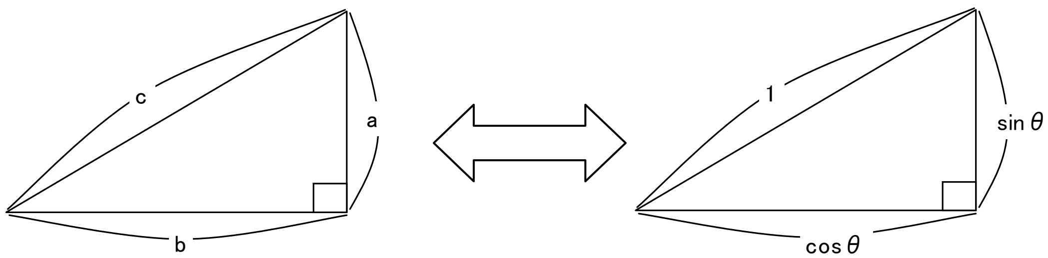
できましたか？

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ となります。

cos や sin が入っていて変に感じるかもしれないですが、合っています。
公式集にもよく載っています。

また三平方の定理より $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ もいえます。

★　三平方の定理

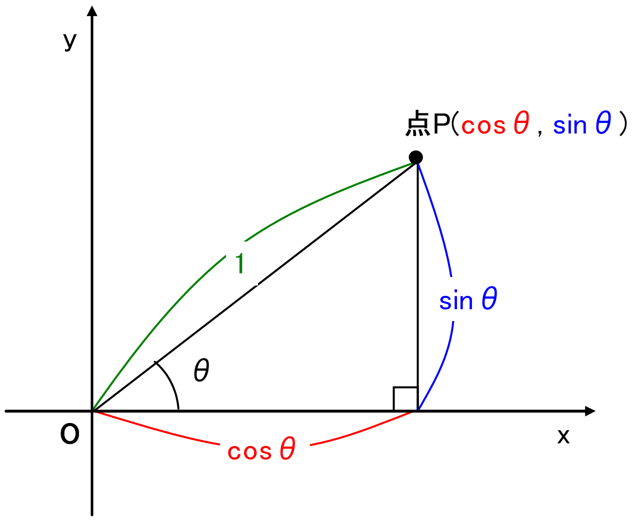


$a^2 + b^2 = c^2$　　　　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$

三平方の定理はもちろんですが、
====================
・ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

・ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
====================
この２つの公式もきちんと覚えておいてください。
(もう三角比の定義が理解できているので、公式というより常識になっていると思います。)

さて、この三角形を再び座標の上に載せます。



座標の値に cos θ とか sin θ が入って見にくいですが、点 P の x 座標が cos θ で y 座標が sin θ になっていることがわかります。
これがさっき

・**sin は「y」**

・**cos は「x」**

と話した理由です。

・**sin は「y 座標」**

・**cos は「x 座標」**

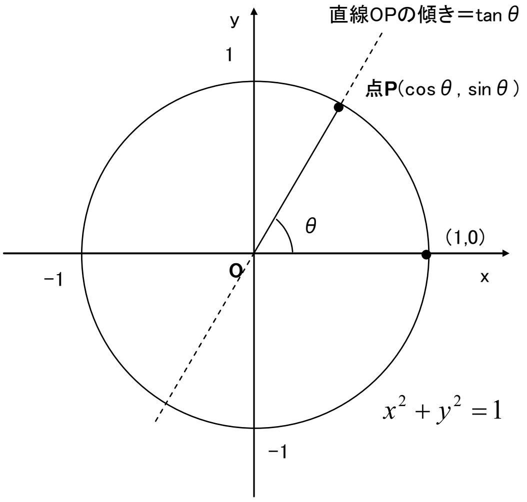
と思ってくれても良いです。

そろそろ準備が整ってきました。
ここまでくれば三角関数の定義も理解できるとおもいます。

それでは、見ていきましょう。

<u>三角関数の定義</u>

三角関数の定義は以下のようになっています。



==

単位円$x^2+y^2=1$に点(1,0)から正方向にθ回転した点 P を取る。

このとき、点 P の座標を(cos θ ,sin θ)、OP の傾きを tan θ とするのが三角関数の定義です。

==

どうですか？

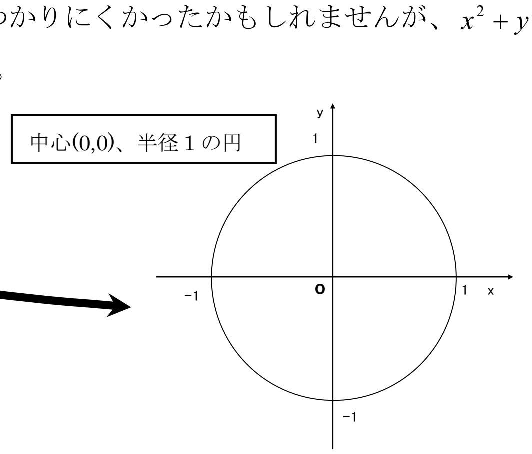
言葉が難しくて理解しにくいかもしれません。

単語の解説をしながら一行一行見ていきます。

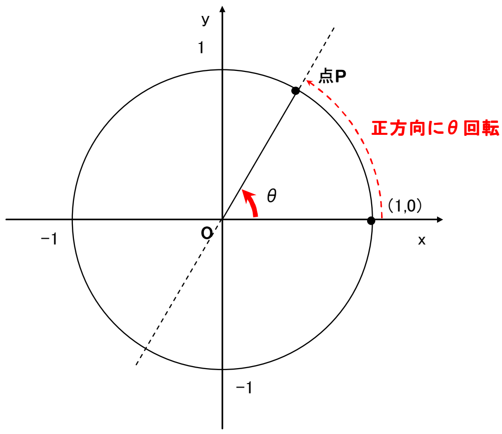
「単位円$x^2+y^2=1$に点(1,0)から正方向にθ回転した点 P を取る。」

→**単位円**というのは**半径が１の円**のこと。

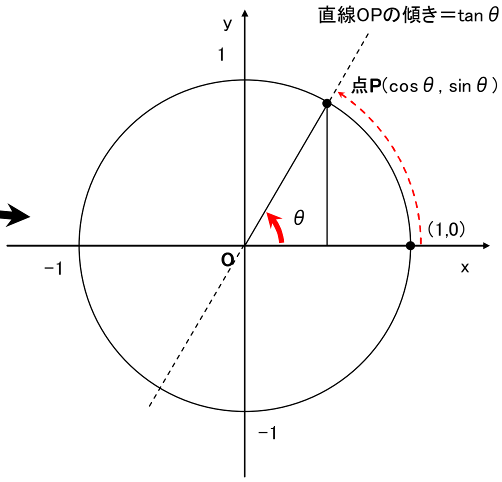
円の式を習っていない人は$x^2+y^2=1$がわかりにくかったかもしれませんが、$x^2+y^2=1$はこんな図形なんだと分かれば OK です。



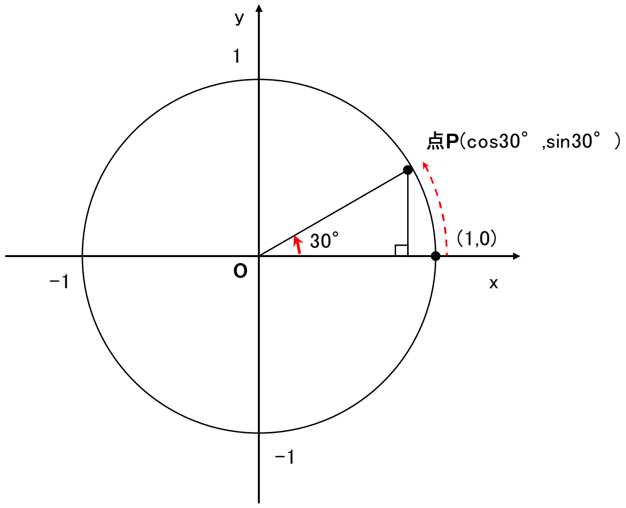
→「正方向にθ回転した点Ｐを取る」は少し難しいですね。
　数学で**<u>正方向に回転</u>**というのは**「反時計回り」**のことです。
　点(1,0)が回転していく動きをイメージしましょう。θ回転して止まった点をＰとします。



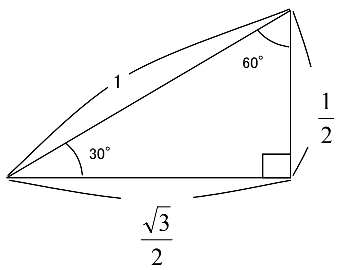
このとき、点Ｐの座標を(cosθ,sinθ)、OPの傾きをtanθとするのが三角関数の定義です。
→頭の中に<u>こんな図</u>が描ければ合格です。



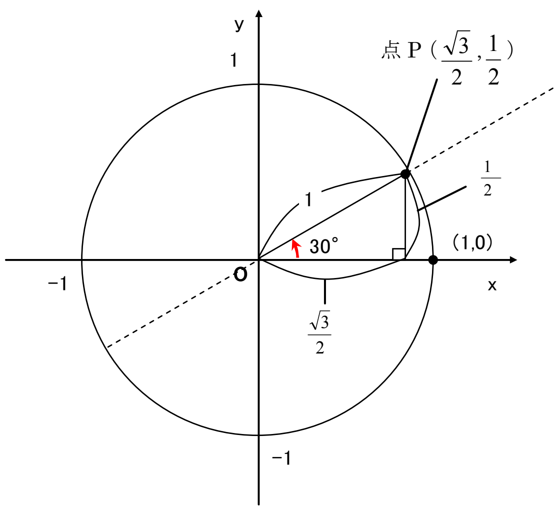
せっかくなんで、ちょっと遊んでみましょう。
θ に数字を入れると点 P が回転するイメージをつかんでください。
たとえば θ に 30°を代入してみます。
点(1,0)が反時計回りに 30°回転していきます。



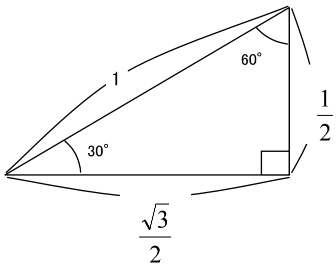
このとき、きちんと下の三角形が隠れていることに気付くことが大切です。



三角形に気付けば、点 P の座標はすぐに分かります。



ちなみに tan30°の値はわかりますか？



傾きを求めようとすると、$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ という形になってしまいますね。

僕は昔この分数の中に分数が入った形が苦手だったのでここで解説をします。
いくつか考え方がありますが、**１をかける方法**がポピュラーかと思うのでそれを解説します。

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 1=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{2}{2}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

STEP1

STEP2

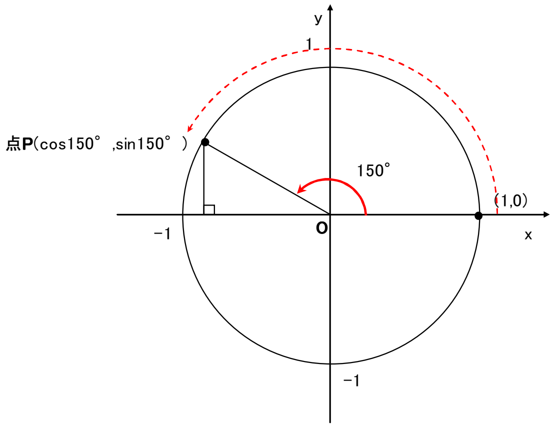
STEP1: 1 を $\frac{2}{2}$ と見る。

STEP2: 2 を $\frac{2}{1}$ と見ることがポイントです。

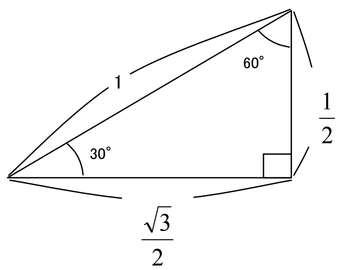
例題を用意したのでやってみてくださいね。

[例題]（１）$\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$（分母が分数）　（２）$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$（分子が分数）

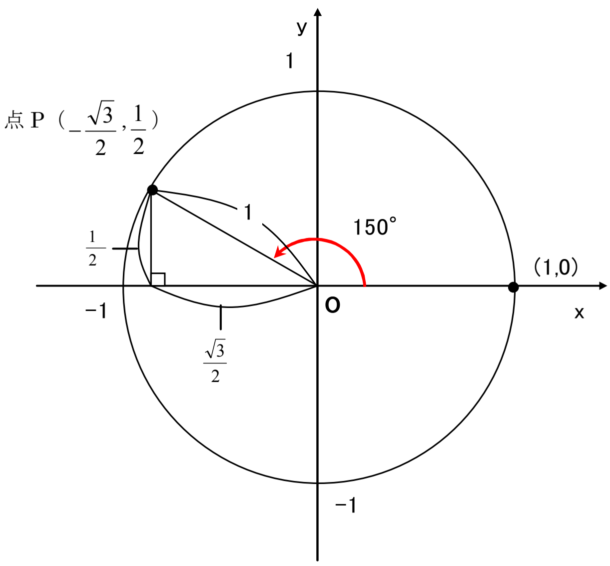
次はθに 150°を代入してみます。
点(1,0)が反時計回りに 150°回転していきます。



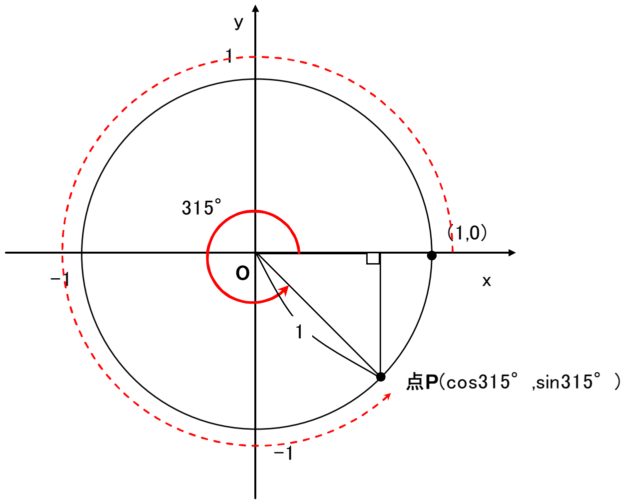
このときも向きが違いますが、下の三角形が隠れていますね。



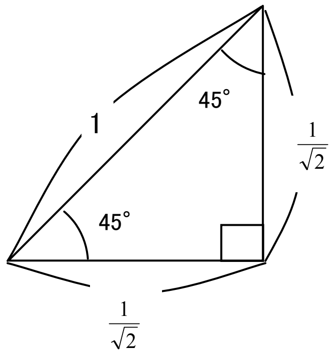
点Ｐのｘ座標がマイナスの値になっていることに注目してくださいね。
今まで、正の範囲でしか考えていなかったので戸惑うかもしれませんが少しずつ慣れていきましょう。



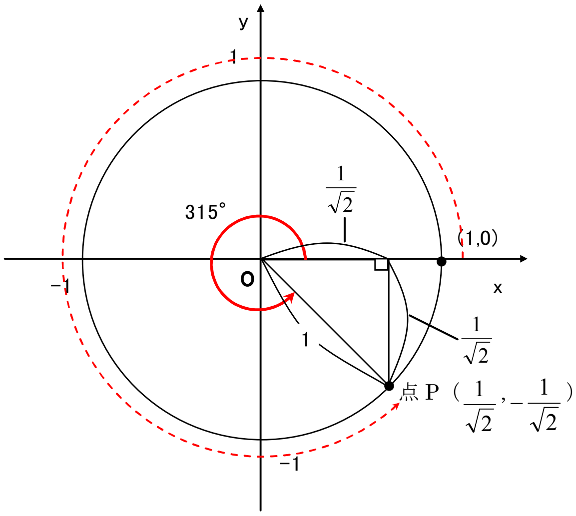
角度が 180° を超えてもやり方は同じです。
１つやってみましょう。



このときは、下の三角形が隠れているのがわかります。



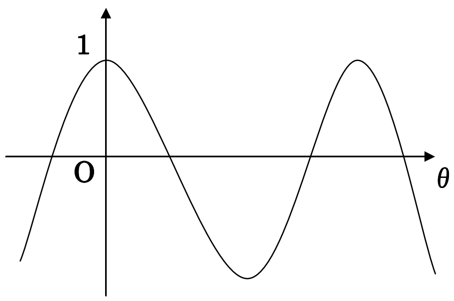
慣れてくれば、図を頭の中で描けるようになるので楽になります。
ぜひ、描けるようになるまで練習をしてくださいね。



練習としてθにいろんな値をガンガン代入して計算をしてみましょう。
0°、45°、120°、240°、360°、420°などなんでもいれてみましょう。
何度か計算すればコツが見えてきます。
そのコツの一つとして**対称性や周期性**があります。
対称性や周期性は本当にいろんなところに潜んでいて、気付くことで一瞬で解答までたどり着くことができます。僕のなかでは**一撃必殺**のイメージがあります。

ただ、ある程度まとめて勉強しないと見えてこない部分があるのでいつかレポートにできればいいなぁとは思ってます。

また三角関数の対称性・周期性はグラフを書いてみると、とても分かりやすくなります。
今回は省きますが、自分でぜひ調べてみてくださいね。



最初に書いた通り、今回のレポートの内容は難しかったかもしれませんが、ぜひ何度か読み返してみてください。きっといろんな発見があるとおもいます。

今回も本当の基礎と呼べる、応用の利く知識を提供したつもりです。

是非、この知識をもとにいろんな問題を解いてみてください。

知っているだけでは点数・偏差値は決して上がりません。
教わった知識を持って、必ず問題に挑んでください。
解けないときもあるかもしれません。

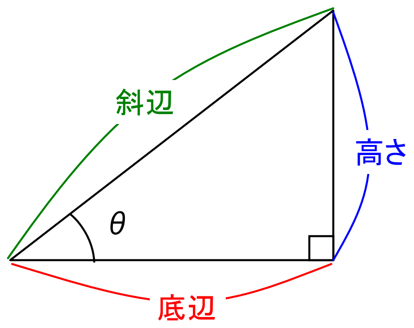
そのときは、なんでその問題が解けなかったのか？
自分に足りなかった知識は何なのか？
知識があって解けなかったなら、どういう視点が足りなかったのか？

これらを意識して勉強すれば成績が上がらないなんてことはないはずです。

最後にポイントをまとめておきます。

===

★三角比の定義

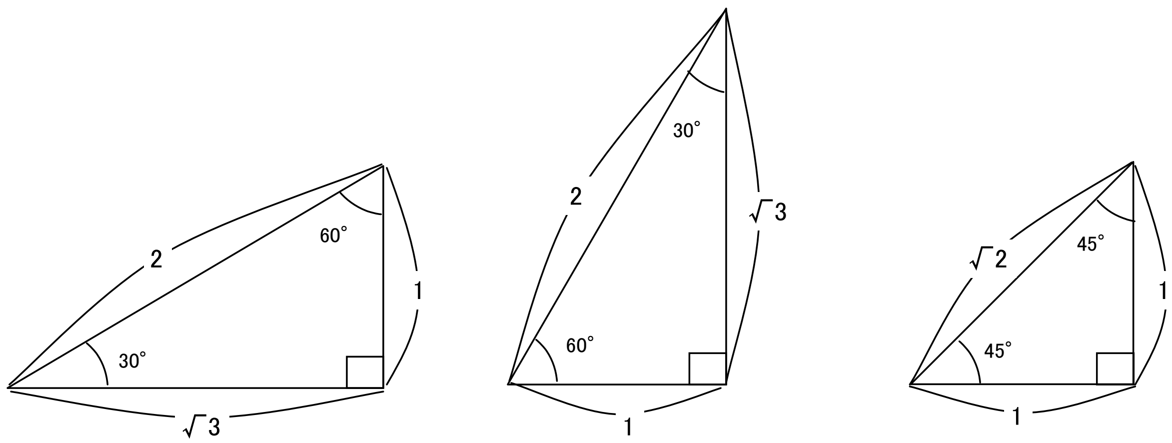


$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} \\[2ex] \tan\theta = \dfrac{\text{高さ}}{\text{底辺}} \end{array} \right.$$

===

★確実に理解すべき三角形たち

→これらの三角形は本当に大切です。どんな形で問われても答えられるように
　しておきましょう。三角定規は必ず手に入れておいてください。



===

★三角関数

・**sin は「y」**

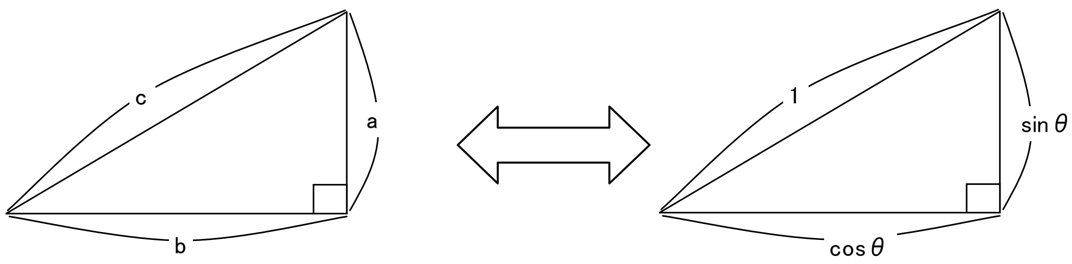
・**cos は「x」**

・**tan は「傾き」**

===

==

★　三平方の定理



$a^2 + b^2 = c^2$　　　　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$

==

★三角比の定理

・ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

→この式が 傾き＝$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ と見えていますか？**tan は傾き**でしたね。

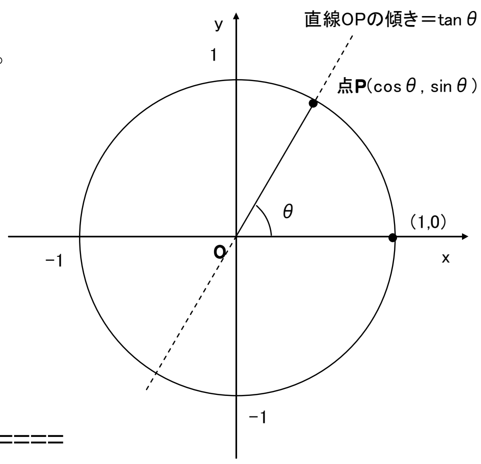
・ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

→三平方の定理との関連性を思い出してくださいね。
　円の方程式も併せて理解しておきましょう。

==

★三角関数の定義

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ に点(1,0)から正方向に θ 回転した点 P を取る。このとき、点 P の座標を($\cos\theta$、$\sin\theta$)、OP の傾きを $\tan\theta$ とするのが三角関数の定義です。



→**単位円**は「**半径が１の円**」、**正方向**というのは「**反時計回り**」でした。θ に角度を代入することで、点 P が回転していく様子を頭の中にしっかり描いてくださいね。

==